Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Геологический факультет

УТВЕРЖДАЮ
Декан Геологического факультета
академик
______________/Д.Ю.Пущаровский/
«___» ________________20   г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Линейная алгебра

Автор-составитель: Степанянц С.А.

Уровень высшего образования:
Бакалавриат

Направление подготовки:

05.03.01 Геология

Направленность (профиль) ОПОП:

Геофизика

Форма обучения:

Очная

Рабочая программа рассмотрена и одобрена
Учебно-методическим Советом Геологического факультета
(протокол № ___________, ______________)

Москва 20__

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки «Геология» (*программы бакалавриата, магистратуры, реализуемых последовательно по схеме интегрированной подготовки)* в редакции приказа МГУ от 30 декабря 2016 г.

Год (годы) приема на обучение – 2019.

Цель и задачи дисциплины

Цель дисциплины– формирование систематизированных знаний в области линейной, представления об основных математических методах.

Задачи дисциплины:

Главная задача курса «Линейная алгебра» − дать студентам современные знания и хорошую практическую подготовку, необходимую, для успешного применения полученных знаний при изучении математического анализа, теории дифференциальных уравнений, уравнений математической физики и других математических дисциплин, так и для решения специфических задач, возникающих в профессиональной сфере.

Основные задачи курса:

- развитие алгоритмического и логического мышления студентов;
- формирование у студентов достаточно широкого взгляда на линейную алгебру, включая теорию абстрактных линейных пространств, их геометрической структуры, функций над этими пространствами;
- формирование необходимого уровня алгебраической и геометрической подготовки для понимания других математических и прикладных дисциплин;
- выработка у студентов умения самостоятельно расширять свои математические знания и проводить математический анализ прикладных задач.

1.Место дисциплины в структуре ОПОП ВО : дисциплина «линейная алгебра»входит в вариативную частьестественно-научного цикла, Изучается на 1 курсе во2 семестре.

2. Входные требования для освоения дисциплины, предварительные условия:

Для изучения курса «линейная алгебра» необходимо твердое знание студентами базового курса математики средней школы, а также дисциплины «аналитическая геометрия».

3. Результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с требуемыми компетенциями выпускников.

Компетенции выпускников, формируемые (полностью или частично) при реализации дисциплины:

УК-5.Б Способность в контексте профессиональной деятельности использовать знания об основных понятиях, объектах изучения и методах естествознания.

ОПК-4.Б Способность применять знания фундаментальных разделов наук о Земле, базовые знания естественно-научного и математического циклов при решении стандартных профессиональных задач

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю):

Знать:

-основные понятия и результаты *линейной алгебры* (линейные пространства и линейная зависимость, системы линейных уравнений, линейные пространства и линейная зависимость, собственные векторы и собственные значения, теория линейных операторов, свойства линейных и билинейных функций, классификацию квадратичных функций);

-основные понятия и результаты высшей алгебры (теория матриц, системы линейных уравнений)

Уметь:

- решать задачи вычислительного и теоретического характера в области евклидовых и унитарных пространств,доказывать утверждения;
- находить собственные векторы и собственные значения, канонический вид матриц линейных операторов и билинейных функций, классифицировать квадрики;

Владеть: - методами и алгоритмами векторной, линейной и высшей алгебры

4. Формат обучения –лекционные и семинарские занятия

5. Объем дисциплины (модуля) составляет**3**з.е., в том числе **52**академических часа, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (**26** часов – занятия лекционного типа, **26** часов – занятия семинарского типа), **56** академических часа на самостоятельную работу обучающихся. Форма промежуточной аттестации – экзамен

6. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий

Краткое содержание дисциплины (аннотация):

Во время слушания дисциплины"Линейная алгебра" обучающийся изучит три крупные темы:

- *Линейное пространство (ЛП).* Включает в себя рассмотрение различных линейных пространств; определения и свойств, изоморфизма ЛП; нахождение базиса и размерности ЛП; изучение свойств линейных подпространств и оболочек; определения суммы и пересечения подпространств, прямых сумм, евклидовых и унитарных пространств, нормированных пространств, ортогонального дополнения; рассмотрения процесса ортогонализации.
- *Операторы.* Данная тема включает в себя знакомство с линейными операторами, свойствами и операциями над ними, нахождение матрицы, ядра и образа оператора, изучение свойств собственных чисел и собственных векторов; знакомство с понятием сопряжённого оператора, теоремы о сопряжённых операторах
- *Билинейные и квадратичные формы.*Данный раздел содержит определения, свойства, теоремы о линейных и полуторолинейых, билинейных и квадратичных формах, метод Якоби и закон инерции.

<table>
<tr><th rowspan="3">Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля),

Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)</th><th rowspan="3">Всего (часы)</th><th colspan="4">В том числе</th><th></th></tr>
<tr><th colspan="4">Контактная работа
(работа во взаимодействии с преподавателем)
Виды контактной работы, часы</th><th>Самостоятельная работа обучающегося, часы *
(виды самостоятельной работы – эссе, реферат, контрольная работа и пр. – указываются при необходимости)</th></tr>
<tr><th>Занятия лекционного типа</th><th>Занятия лабораторного типа</th><th>Занятия семинарского типа</th><th>Всего</th><th></th></tr>
<tr><td>Раздел1. Линейные пространства</td><td></td><td>8</td><td></td><td>8</td><td>16</td><td>Домашняя работа-15 час</td></tr>
<tr><td>Раздел2. Операторы</td><td></td><td>10</td><td></td><td>10</td><td>20</td><td>Домашняя работа-15 часов</td></tr>
<tr><td>Раздел 3.Билинейные и квадратичные формы</td><td></td><td>8</td><td></td><td>8</td><td>16</td><td>Домашняя работа-10 часа
Подготовка к контрольной работе- 4 часа
Контрольная работа -2 часа</td></tr>
<tr><td>Промежуточная аттестацияэкзамен</td><td></td><td colspan="4"></td><td>10**</td></tr>
<tr><td>Итого</td><td>108</td><td colspan="4">52</td><td>56</td></tr>
</table>

Содержание разделов дисциплины:

В дальнейшем, номер задачи (или параграфа) будет указываться в квадратных скобках после номера учебника, в котором следует искать задачу (или дополнительный теоретический материал по данной теме). Например, [6,№ 3.4] означает ссылку на задачу 3.4 из сборника [6], а [1, Гл.1, п.1-5] означает ссылку на теоретический (или практический) материал из п.1-5 главы 1 учебника [1].
В пункте а) указываются типы задач для аудиторной работы, в пункте б) – типы задач для самостоятельной работы студента.

Раздел I. **Линейные пространства**

1.1. Абстрактные линейные пространства. Определение и примеры. Базис и размерность линейного пространства. Изоморфизм линейных пространств. Матрица перехода от одного базиса к другому. Изменение координат вектора при изменении базиса. Линейные подпространства, линейные оболочки. Теорема о неполном базисе. Сумма и пересечение подпространств. Прямые суммы. Комплексные числа. Алгебраические операции над комплексными числами. Формула Муавра. Корни из комплексных чисел
а) [5 , № 4.3, 4.4, 4.7, 4.47, 4.45, 4.16, 4.30],[3, № 1298, 1317, 1326],
б) [2, § 20];[5 , № 4.5, 4.9, 4.10, 4.48, 4.49, 4.17, 4.31],[3, № 1298 , 1318, 1327].

1.2. Вещественные и комплексные (унитарные) пространства. Неравенство Коши - Буняковского. Общий вид скалярного произведения в унитарном пространстве. Нормированные пространства. Неравенство треугольника. Расстояние между элементами нормированного пространства. Ортогональные системы, ортонормированные базисы. Теорема Шмидта (процесс ортогонализации). Изоморфизм унитарных пространств. Ортогональное дополнение. Ортогональная проекция вектора на подпространство.
а)[5 , № 4.63, 4.65, 4.66, 4.71, 4.73, 4.79],
б) [5, № 4.64, 4.67, 4.70, 4.75, 4.76, 4.80].

Раздел II.**Операторы**

2.1. Линейные операторы и основные операции над ними. Образ и ядро линейного оператора. Невырожденный оператор. Обратный оператор. Матрица линейного оператора. Её изменение при изменении базиса.
а)[5 , № 4.83, 4.85, 4.90, 4.91,4.107, 4.123 , 4.125, 4.114],
б) [5 , № 4.86, 4.87 , 4.92, 4.106, 4.111, 4.123, 4.128, 4.115(б), 4.116, 4.121].

2.2. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора, характеристический многочлен. Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения. Теорема о кратностях. Инвариантные подпространства. Свойства собственных векторов линейного оператора. Критерий существования базиса из собственных векторов. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду.
а) [5 , № 4.129, 4.130, 4.134, 4.135, 4.147, 4.174, 4.177],
б) [5 , № 4.131, 4.132, 4.136, 4.139, 4.145, 4.175, 4.178].

Раздел III.**Билинейные и квадратичные формы**

3.1. Линейные формы. Преобразование матрицы линейной формы при замене координат. Билинейные формы в вещественном пространстве. Преобразование матрицы билинейной формы при замене координат.
а) [5 , № 4.180(а), 4.181, 4.192, 4.197, 4.201, 4.205, 4.207],
б) [5 , № 4.180(б), 4.182, 4.193, 4.194, 4.198, 4.199, 4.200, 4.203, 4.209].

3.2. Квадратичные формы. Приведение квадратичных форм к каноническому виду методом Лагранжа. Знакоположительные, знакопеременные, неположительно и неотрицательно определённые квадратичные формы. Закон инерции. Приведение квадратичных форм к каноническому виду методом Якоби. Критерий Сильвестра.
а) [5 , № 4.211, 4.215, 4.218-4.224], [3 , № 1175, 1187, 1201, 1212, 1243],
б) [5 , № 4.210, 4.212, 4.216 , 4.218-4.224], [3 , № 1177, 1202, 1214, 1244].

3.3. Полуторалинейная форма в унитарном пространстве. Замена матрицы формы при замене базиса. Введение скалярного произведения с помощью формы. Корневые подпространства линейных операторов и нильпотентные операторы. Жорданова форма матрицы.
а) [5 , № 4.151, 4.166(а), 4.167(а,б), 4.168, 4.183, 4.191], [3, № 1090, 1091, 1105, 1106],
б) [5 , № 4.152, 4.166(б), 4.167(в,г), 4.169, 4.184, 4.189], [3, № 1096, 1107]

Раздел IV.**Операторы**

3.4. Сопряжённый оператор и его свойства. Матрица сопряжённого оператора. Нормальные, самосопряжённые, унитарные операторы, их матрицы и свойства. Спектральная теорема нормальных операторов. Связь между самосопряжёнными, унитарными и нормальными операторами. Спектральная теорема самосопряжённых операторов. Спектральная теорема унитарных операторов.

7. Фонд оценочных средств (ФОС) для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)
7.1. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости.

Для текущего контроля студентов в ходе семестра проводится контрольнаяработа

Типовые задачи контрольной работы:

1. Доказать, что пространство всех 15-мерных векторов, у которых координаты с чётными номерами равны между собой, и пространство всех квадратных матриц с тремя столбцами-изоморфны. Указать какой-нибудь изоморфизм.
2. Написать неравенство Коши-Буняковского и неравенство треугольника для пространства C[a,b] со скалярным произведением $(f,g)=\int_a^b f(t)g(t)dt$
3. Линейный оператор***A*** в базисе$\langle e_1,e_2,e_3\rangle$имеет матрицу $A_e=\begin{pmatrix}2&5&2\\-1&-3&0\\-2&-3&-2\end{pmatrix}$.Найти матрицу оператора ***A***в базисе $\langle e'\rangle=\langle e_1',e_2',e_3'\rangle$, где
$e_1'=2e_1-e_2-e_3,$
$e_2'=-e_1+e_2,$
$$e_3'=-e_1+2e_3$$

4. Выписать матрицу квадратичной формы $A(x,x) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 3x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2$Построить ортонормированный базис из системы векторов этой матрицы, выписать матрицу квадратичной формы в этом базисе и определить, является ли данная квадратичная форма положительно или отрицательно определенной.
5. Методом Лагранжа найти нормальный вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду для следующей квадратичной формы: $x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + +5x_2^2 - 4x_3^2$
6. Найти диагональный вид матрицы А и вычислитьA^m , если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

7.2. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации.

В качестве промежуточного контроля усвоения дисциплины проводится экзамен. Экзамен состоит из двух частей: теоретической и практической.

***7.2.1.*Список вопросов к экзамену по дисциплине «Линейная алгебра»**

1) Линейные пространства. Линейная зависимость. Базис и размерность линейного пространства.
2) Изоморфизм линейных пространств. Линейные подпространства.
3) Сумма и пересечение подпространств. Прямые суммы
4) Вещественные и комплексные (унитарные) евклидовы пространства. Неравенство Коши-Буняковского. Нормированные пространства. Неравенство треугольника.
5) Ортогональные и ортонормированные системы векторов. Теорема Шмидта.
6) Ортогональные дополнения. Ортогональная проекция вектора на подпространство.
7) Линейные операторы и основные операции над ними.
8) Образ и ядро линейного оператора.
9) Обратный оператор.
10) Матрица перехода от одного базиса к другому. Изменение координат вектора при изменении базиса
11) Матрица линейного оператора. Её изменение при изменении базиса.
12) Собственные вектора и собственные значения линейного оператора. Метод отыскания собственныхзначений исобственных векторов. Алгебраическая и геометрическая кратности собственных значений.
13) Инвариантные подпространства. Свойства собственных векторов линейного оператора.
14) Критерий существования базиса из собственных векторов оператора. Приведение матрицы оператора к диагональному виду.
15) Линейные формы. Координаты линейной формы и их изменения при изменении базиса. Представление линейной формы в унитарном пространстве.
16) Билинейные формы.Преобразование матрицы билинейной формы при изменении базиса.
17) Квадратичные формы.Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа.
18) Знакоопределённые, знакопеременные и квазиопределённые квадратичные формы. Закон инерции квадратичных форм.

19) Метод Якоби приведения квадратичной формы к каноническому виду. Критерий Сильвестра.
20) Полуторалинейная форма унитарном пространстве.
21) Понятие сопряжённого оператора и его свойства. Нормальные и унитарные операторы и их свойства.
22) Спектральная теорема нормальных операторов. Связь между самосопряжёнными, унитарными и нормальными операторами. Спектральная теорема самосопряжённых и спектральная теорема унитарных операторов.

7.2.2. экзаменационные задачи:

1. Построить ортонормированный базис линейной оболочки векторов $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$:

$$a_1 = (1;1;1;1)$$
$$a_2 = (1;1;1;3)$$
$$a_3 = (1;2;1;2)$$
$$a_4 = (3;4;3;4)$$

2. Выписать матрицу квадратичной формы $A(x,x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 - 4x_2x_3 + x_3^2$Построить ортонормированный базис из собственных векторов этой матрицы. Какой вид имеет квадратичная форма в этом ортонормированном базисе из собственных векторов.
3. В базисе $\overrightarrow{e_1}(1;0;0)$,$\overrightarrow{e_2}(0;1;0)$, $\overrightarrow{e_3}(0;0;1)$ задан линейный оператор $\boldsymbol{A}$ с матрицей $A_e = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$.Найти матрицу оператора $\boldsymbol{A}$ в базисе $\overrightarrow{f_1}(2;1;0)$,$\overrightarrow{f_2}(1;0;-1)$, $\overrightarrow{f_3}(3;5;6)$
4. Линейный оператор задан своей матрицей в некотором базисе $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.Найти собственные значения и собственные вектора данного оператора и выяснить, диагонализируема ли матрица оператора.
5. Найти диагональный вид матрицы А и вычислитьA^5 , если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.
6. Найти собственные значения и собственные вектора оператора А:$P_1 \to P_1$, где P_1- пространство многочленов степени не выше 1 , $Af = \left((3-x)f(x)\right)'$

Шкала и критерии оценивания результатов обучения по дисциплине.

Результаты обучения	«Неудовлетво-рительно»	«Удовлетво-рительно»	«Хорошо»	«Отлично»
Знания: понятий и теорем аналитической геометрии, векторной и высшей алгебры.	Знания отсутствуют	Общие, но не структурированные знания	Знание понятий курса	Систематические знания
Умения:	Умения	Фрагментарн	В целом	Знание всех

доказывать теоремы курса, применять полученные знания для решения задач	отсутствуют	ые знания	успешное, но содержащее отдельные пробелы	теорем и хода их доказательства. Успешное решение теоретических и практических задач
Владения: Методами решения разнообразных задач геометрии и алгебры	Навыки владения графическими методами отсутствуют	наличие отдельных навыков	В целом сформированные навыки использования математических методов решения задач аналитической геометрии	Сформированные навыки использования математических методов решения задач аналитической геометрии

8. Ресурсное обеспечение:
А) Перечень основной и дополнительной литературы.
- основная литература:

1. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука, 1980.
2. *Ильин В.А. , Позняк Э.Г.* Аналитическая геометрия. Учебник для ВУЗов. М: ФИЗМАТЛИТ, 2004
3. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Часть 1. Линейная алгебра и основы математического анализа. *Под редакцией А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича.* М.: Наука, 1993

-дополнительная литература:

1. *Прилепко А.И., Сандаков Е.Б.*Матрицы и линейные пространства, М.:Изд. МИФИ, 1981
2. *Прилепко А.И., Сандаков Е.Б.*Нормальные операторы и квадратичные формы, М.:Изд. МИФИ, 1981/

9. Язык преподавания – русский.

2. Преподаватель (преподаватели)– Степанянц С.А.

11. Автор (авторы) программы– Степанянц С.А.