

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего  
профессионального образования  
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
Геологический факультет

УТВЕРЖДАЮ

Декан Геологического факультета  
академик

\_\_\_\_\_/Д.Ю.Пущаровский/

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20 г.

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

### **Дифференциальные уравнения**

Автор-составитель: Степин С.А.

**Уровень высшего образования:**

***Бакалавриат***

**Направление подготовки:**

**05.03.01 Геология**

**Направленность (профиль) ОПОП:**

**Геофизика**

Форма обучения:

***Очная***

Рабочая программа рассмотрена и одобрена  
Учебно-методическим Советом Геологического факультета  
(протокол № \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_)

Москва 2019

---

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки «Геология» (*программы бакалавриата, магистратуры, реализуемых последовательно по схеме интегрированной подготовки*) в редакции приказа МГУ от 30 декабря 2016 г.

Год (годы) приема на обучение – 2018.

© Геологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова  
*Программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения факультета.*

## Цель и задачи дисциплины

### Целью курса "Дифференциальные уравнения"

является освоение студентами фундаментальных основ и современных методов теории обыкновенных дифференциальных уравнений, изучение структуры устойчивости их решений, выявление характеристических свойств и эффектов, возникающих в приложениях

### Задачи

-освоение методов интегрирования основных классов обыкновенных дифференциальных уравнений, овладение приемами аналитического построения их решений, а также методами качественного и асимптотического анализа их поведения

**1. Место дисциплины в структуре ОПОП ВО** – вариативная часть, естественно-научная дисциплина, курс – II, семестр – 3.

### **2. Входные требования для освоения дисциплины, предварительные условия:**

освоение дисциплин «Высшая математика», «Линейная алгебра».

Дисциплина необходима в качестве предшествующей для дисциплины «Уравнения математической физики».

### **3. Результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с требуемыми компетенциями выпускников.**

Компетенции выпускников, формируемые (полностью или частично) при реализации дисциплины:

УК-1.Б Способность осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации(формируется частично).

УК-5.Б Способность в контексте профессиональной деятельности использовать знания об основных понятиях, объектах изучения и методахестествознания (формируется частично).

ОПК-4.БСпособность применять знания фундаментальных разделов наук о Земле, базовые знания естественно-научного и математического циклов при решении стандартных профессиональных задач(формируется частично).

### **Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю):**

**Знать:** фундаментальные принципы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, основные методы построения их решений, приемы качественного и асимптотического анализа их поведения, приложения к задачам устойчивости и вариационного исчисления.

**Уметь:** определять тип обыкновенного дифференциального уравнения, использовать методы и приемы интегрирования в квадратурах для построения решений, исследовать точки покоя систем на устойчивость.

**Владеть:** техникой и приемами построения решений основных классов обыкновенных дифференциальных уравнений и анализа их качественного поведения.

### **4. Формат обучения** – лекционные и семинарские занятия

**5. Объем дисциплины (модуля)** составляет **3** з.е., в том числе **84** академических часа, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (**36** часов – занятия лекционного типа, **36** часов – занятия семинарского типа, **2** часа – групповые консультации, **10** часов – мероприятия текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации), **36** академических часа на самостоятельную работу обучающихся. Форма промежуточной аттестации – экзамен

**6. Содержание дисциплины (модуля),** структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий

**Краткое содержание дисциплины (аннотация):**

В курсе "Дифференциальные уравнения" излагаются следующие разделы:

- Базовые понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Методы интегрирования уравнений первого порядка.
- Проблема существования и единственности решения задачи Коши для уравнений разрешенных и неразрешенных относительно старшей производной.
- Анализ структуры решений линейных дифференциальных уравнений высших порядков однородных и неоднородных.
- Основные понятия и результаты теории устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.
- Задача вариационного исчисления, уравнение для экстремалей функционала, первые интегралы.

На практических занятиях студенты знакомятся с конкретными методами интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений и получают навыки отыскания их решений.

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины (модуля), Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Всего (часы)	В том числе				Самостоятельная работа обучающегося, часы * (виды самостоятельной работы – эссе, реферат, контрольная работа и пр. – указываются при необходимости)
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем) Виды контактной работы, часы				
		Занятия лекционного типа	Занятия лабораторного типа	Занятия семинарского типа	Всего	
Раздел 1. Базовые понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Методы интегрирования уравнений первого порядка		8		10	18	Подготовка к контрольной работе №1, 6 часов
Раздел 2. Проблема существования и единственности решения задачи Коши для уравнений разрешенных и неразрешенных относительно старшей производной		6		4	10	Подготовка к контрольной работе №1, 4 часа
Раздел 3. Анализ структуры решений линейных дифференциальных уравнений высших порядков однородных и неоднородных		8		8	16	Подготовка к контрольной работе №2, 8 часов
Раздел 4. Основные понятия и результаты теории устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка		8		10	18	Подготовка к контрольной работе №3, 4 часов
Раздел 5. Задача вариационного исчисления, уравнение для экстремалей функционала, первые интегралы		6		4	10	Подготовка к контрольной работе №3, 4 часов
Промежуточная аттестация <u>экзамен</u>						10
<b>Итого</b>	<b>108</b>	<b>72</b>				<b>36</b>

## Содержание разделов дисциплины:

### 1. Базовые понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Методы интегрирования уравнений первого порядка

Порядок обыкновенного дифференциального уравнения, его общее решение. Интегральные кривые. Метод изоклин. Уравнения с разделяющимися переменными. Интегрирование в квадратурах. Уравнения Бернулли и Риккати. Уравнения в полных дифференциалах. Классы уравнений, допускающих интегрирующий множитель.

### 2. Проблема существования и единственности решения задачи Коши для уравнений разрешенных и неразрешенных относительно старшей производной

Задача Коши для уравнения первого порядка. Условия существования и единственности ее решения. Гладкость решений. Понятие о непрерывной зависимости от начальных данных и параметров. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной. Общее и особое решения. Уравнения Лагранжа и Клеро. Существование и единственность решений системы дифференциальных уравнений и уравнений высших порядков.

### 3. Анализ структуры решений линейных дифференциальных уравнений высших порядков однородных и неоднородных

Фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения. Формула Лиувилля-Остроградского. Линейные неоднородные уравнения. Принцип суперпозиции. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами однородные и неоднородные. Уравнения Эйлера. Интегрирование линейного неоднородного уравнения методом вариации постоянных. Функция Коши. Понятие о краевых задачах. Функция Грина.

### 4. Основные понятия и результаты теории устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

Фундаментальная матрица однородной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Определитель Вронского фундаментальной матрицы. Интегрирование линейной неоднородной системы методом вариации постоянных. Фундаментальная матрица линейной однородной системы с постоянными коэффициентами. Основные понятия теории устойчивости. Типы точек покоя. Исследование нелинейной системы на устойчивость по первому приближению.

### 5. Задача вариационного исчисления, уравнение для экстремалей функционала, первые интегралы

Функционал и его вариация. Необходимое условие экстремума. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера для экстремалей. Простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера. Понятие о первых интегралах. Интегрирование квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка.

## Содержание семинаров

1. Построение поля направлений и интегральных кривых методом изоклин
2. Уравнения с разделяющимися переменными и однородные уравнения
3. Уравнения в полных дифференциалах. Уравнения, допускающие интегрирующий множитель
4. Уравнения неразрешенные относительно производной. Уравнения Лагранжа и Клеро
5. Уравнения высших порядков. Простейшие случаи понижения порядка
6. Определитель Вронского. Интегрирование линейного однородного уравнения второго порядка
7. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами и уравнения Эйлера
8. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью --- квазимногочленом
9. Интегрирование линейного неоднородного уравнения методом вариации постоянных
10. Фазовые траектории вблизи точки покоя системы двух линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами. Типы точек покоя
11. Исследование нелинейной системы на устойчивость по первому приближению
12. Простейшие случаи интегрируемости уравнений Эйлера для экстремалей
13. Интегрирование квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка методом характеристик

## Рекомендуемые образовательные технологии

Используются презентации и интерактивные формы проведения занятий. Студенты выполняют индивидуальные задания в рабочей тетради под непосредственным руководством преподавателя или вместе с ним у доски. Активные и интерактивные формы проведения занятий в сочетании с внеаудиторной работой способствуют формированию и развитию профессиональных навыков и компетенций обучающихся.

### **7. Фонд оценочных средств (ФОС) для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю)**

#### **7.1. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости.**

Для текущего контроля студентов в ходе семестра проводятся контрольные работы.

***Примерный перечень вопросов для проведения текущего контроля/ Темы контрольных работ :***

Содержание контрольной работы №1

Задание 1: Построить поле направлений и интегральные кривые методом изоклин.

Задание 2: Определить тип уравнения (с разделяющимися переменными) и решить его.

Задание 3: Найти интегрирующий множитель и проинтегрировать уравнение в полных дифференциалах.

Задание 4: Для уравнений Лагранжа и Клеро найти общее и особое решения.

Задание 5: Понизить порядок уравнения и проинтегрировать его в квадратурах.

Содержание контрольной работы №2

Задание 1: Найти общее решение линейного однородного уравнения второго порядка в случае, когда известно его нетривиальное частное решение.

Задание 2: Построить фундаментальную систему решений линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами в случае кратных корней характеристического многочлена.

Задание 3: Найти общее решение уравнения Эйлера в случае комплексных корней определяющего уравнения.

Задание 4: Построить решение неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью --- квазимногочленом в резонансном случае.

Задание 5: Проинтегрировать линейное неоднородное уравнение методом вариации постоянных.

Содержание контрольной работы №3

Задание 1: Определить тип точки покоя системы двух линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами и построить фазовые траектории системы.

Задание 2: Исследовать нелинейную систему на устойчивость по первому приближению.

Задание 3: Составить уравнение Эйлера для экстремалей функционала и проинтегрировать его.

Задание 4: Найти интегральную поверхность квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка

## **7.2. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации.**

*Примерный перечень вопросов при промежуточной очной аттестации:*

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Общее решение. Интегральные кривые. Метод изоклин.
2. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
3. Линейные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли и Риккати.
4. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.
5. Существование и единственность решения задачи Коши для уравнения первого порядка.
6. Гладкость решений. Понятие о непрерывной зависимости от начальных данных и параметров.
7. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной. Существование и единственность решения.
8. Приемы интегрирования уравнений, не разрешенных относительно производной. Уравнения Лагранжа и Клеро.
9. Существование и единственность решений системы дифференциальных уравнений и уравнений высших порядков. Простейшие случаи понижения порядка.
10. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Линейная зависимость и независимость функций. Фундаментальная система решений.
11. Определитель Вронского. Восстановление линейного уравнения по заданной фундаментальной системе решений.



12. Формула Лиувилля-Остроградского. Интегрирование линейного однородного уравнения второго порядка.
13. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами и уравнения Эйлера.
14. Линейные неоднородные уравнения. Структура общего решения. Принцип суперпозиции.
15. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью --- квазимногочленом.
16. Интегрирование линейного неоднородного уравнения методом вариации постоянных. Функция Коши.
17. Понятие краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка. Функция Грина. Задача на собственные значения.
18. Система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Свойства решений однородной системы. Фундаментальная матрица.
19. Определитель Вронского фундаментальной матрицы однородной системы. Формула Лиувилля-Остроградского.
20. Линейные неоднородные системы. Структура общего решения. Интегрирование методов вариации постоянных.
21. Фундаментальная матрица линейной однородной системы с постоянными коэффициентами. Формула Дюамеля для решения неоднородной системы.
22. Основные понятия теории устойчивости. Точки покоя типа «узел» и «седло». Исследование нелинейной системы на устойчивость по первому приближению.
23. Точки покоя типа «фокус» и «центр». Устойчивость типа точки покоя относительно малого возмущения матрицы системы.
24. Функционал и его вариация. Необходимое условие экстремума.
25. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера для экстремалей.
26. Простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера. Понятие о первых интегралах.
27. Интегрирование квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка.

#### **Шкала и критерии оценивания результатов обучения по дисциплине.**

Результаты обучения	«Неудовлетворительно»	«Удовлетворительно»	«Хорошо»	«Отлично»
Знания: фундаментальные принципы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, основные методы построения их решений, приемы качественного и асимптотического анализа их поведения, приложения к задачам устойчивости и вариационного исчисления	Знания отсутствуют	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Систематические знания

Умения: определять тип обыкновенного дифференциального уравнения, использовать методы и приемы интегрирования в квадратурах для построения решений, исследовать точки покоя систем на устойчивость	Умения отсутствуют	В целом успешное, но не систематическое умение с неточностями принципиального характера	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение использовать методы и приемы интегрирова- ния уравнений	Успешное умение использовать методы и приемы интегрирова- ния уравнений исследования систем на устойчивость
Владения: техник и приемами построения решений основных классов обыкновенных дифференциальных уравнений и анализа их качественного поведения	Отсутствуют навыки построения решений основных классов уравнений	Фрагментарное владение методикой, наличие отдельных навыков	В целом сформирован- ные навыки анализа качественного поведения решений уравнений	Владение техник и приемами построения решений и анализа их качественного поведения

## 8. Перечень основной и дополнительной литературы.

### - основная литература:

1. Л. Э. Эльсгольц Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, Курс высшей математики и математической физики, вып. 3, М.:Наука, 1969; УРСС, 1998.
2. М. В. Федорюк Обыкновенные дифференциальные уравнения, Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов втузов, М.: Наука, 1985.

### - дополнительная литература:

1. И. Г. Петровский Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М.: Наука, 1970; УРСС, 2003.
2. Л. С. Понтрягин Обыкновенные дифференциальные уравнения, М.: Наука, 1982; УРСС, 2018.
3. А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников Дифференциальные уравнения, Курс высшей математики и математической физики, вып.7, М.: Наука, 1985; М.: Физматлит, 2005.
4. А. П. Карташев, Б. Л. Рождественский Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления, М.: Наука, 1986.

9. Язык преподавания – русский.

10. Преподаватель (преподаватели)– С. А. Степин

11. Автор (авторы) программы– С. А. Степин